

Lemma di Steinitz: Sia $V(k)$ uno s.v. di dimensione n su k .
Sia A una seq. liberale
finitamente generata, B una seq. di gen.

$$\Rightarrow \underline{|A| \leq |B|}.$$

CONSEGUENZE:

1) Se A, B due basi di $V(k)$ f.s.

$$\Rightarrow |A| = |B|.$$

$$\text{Dim: } \left. \begin{array}{l} A \text{ libera, } B \text{ di gen.} \\ A \text{ di gen. } B \text{ libera} \end{array} \Rightarrow |A| \leq |B| \Rightarrow |B| \leq |A| \right\} \Rightarrow |A| = |B|.$$

□

Definizione: Sia $V(k)$ uno spazio vettoriale su k .

si dice dimensione di $V(K)$

$\dim V(K)$

- se $V(K) = \{0\} \Rightarrow \dim V(K) = 0$
- se $V(K) \neq \{0\} \Rightarrow \dim V(K) = |B|$
ove B è una sua qualsiasi base.

A meno di isomorfismi uno sp. vettoriale
finitamente generato $V(K)$ è caratterizzato
solo da K e da n .

Scriviamo $V_n(K)$ per un generico
sp. vettoriale su K di dimensione $= n$.

$$V_n(K) \cong K^n.$$

2) Sia $V_n(1k)$ uno s.v. f.g di dim $= n$ allora.

i) OGNI SEQUENZA A di n vettori liberi è di generatori $\Rightarrow$ BASE

ii) OGNI SEQUENZA B di n generatori è libera $\Rightarrow$ BASE.

Dim: ii) Se fosse B legata $\Rightarrow \exists \bar{v}_i \in B$ tale

$$\text{da } \mathcal{L}(B \setminus \{\bar{v}_i\}) = \mathcal{L}(B) = V_n$$

$\Rightarrow \exists$ una seq. di $(n-1)$ generatori di $V_n(1k)$

in assurdo, perché c'è una base (e dunque nq . liberi) di n vettori.

i) se fosse A non di generatori $\Rightarrow$

$$\exists \bar{b} \in V_n \setminus \mathcal{L}(A).$$

Ma a questo punto $A \cup \{\bar{b}\}$ sarebbe libera

$$A = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$$

in quanto

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i + \beta \bar{b} = \underline{0}$$

implica $\beta = 0$ grazie all'irriducibilità

$$\bar{b} = \beta^{-1} \sum \alpha_i \bar{a}_i \quad \text{e dunque } \bar{b} \in L(A).$$

ma se $\beta = 0$, poiché A è libera $\Rightarrow$

ogni α_i deve essere $= 0 \Rightarrow A \cup \{\bar{b}\}?$

Libera. Ma questo è assurdo in quanto c'è una seq. di n generatori di $V_n(K)$ e

3) Sia $V_n(K)$ uno $\mathbb{Z}$ -modulo di $\dim = n$

$\Rightarrow \forall i = 0, \dots, n, V_n(K)$ contiene un sott. $W \leq V_n(K)$

di dimensione i . In particolare se

$$\dim W = 0 \Rightarrow W = \{0\}$$

$$\dim W = n \Rightarrow W = V_n.$$

$\hookrightarrow$ sottospazi banali.

Dm: Sia B una base di $V_n(K)$

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n).$$

$$\text{Se } i=0 \Rightarrow W = \mathcal{L}(\emptyset) = \{0\} \subseteq V$$

altrimenti possiamo $W_i = \mathcal{L}(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$.

chiaramente i vettori $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_i)$ sono indip.
e generano $W_i \Rightarrow \dim(W_i) = i$.

Sappiamo ora $W \subseteq V$ e $\dim W = n$

$\Rightarrow$ sia $U = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$ una base di W

$\Rightarrow U$ è una seq. libera di n vettori di V

$\Rightarrow U$ è una base di V e dunque di

generatori $\Rightarrow \mathcal{L}(U) = W = V \Rightarrow W = V$ $\square$.

! N.B. Sarebbe $V_n(K)$ finitamente generato!!

Esempio

$$V = \mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$W = \mathbb{R}[x^2] = \{a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

$$W \subseteq V \quad x \in V \setminus W \Rightarrow W \neq V$$

$$\text{ma } W \cong V \quad \text{e } \dim W = \dim V$$

$$\bullet \quad a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \longmapsto a_0 + a_1x^2 + \dots + a_nx^{2n}$$

4) Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno s.v. finito di $\dim = n$ ed A una sequenza di n vettori $\Rightarrow$

$$|A| < n \Rightarrow A \text{ non è di generatori}$$

$$|A| > n \Rightarrow A \text{ non è libera.}$$

#

Ogni sottosequenza di una seq. libera è libera
Ogni sovra sequenza di una seq. di generatori è di generatori.

Vogliamo ridurre una seq. libera $\Rightarrow$ OK: sottosequenza.

Vogliamo ingrandire una seq. di già $\Rightarrow$ OK: sovrasequenza.

Vogliamo ridurre una seq. di già $\Rightarrow$ SCARTI SUCCESSIVI

Vogliamo ingrandire una seq. libera $\Rightarrow$ COMPLETAMENTO DELLA BASE.

Teorema di completamento della base.

Hp: Sia $V_n(K)$ uno sp. vettoriale finito
generato, $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una sua base
ed $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una sua seq. libera di
vettori (ovvero $A \neq \emptyset$).

E: Esistono $m-n$ vettori in B tali che eliminati
 B' e seq. di questi vettori $A \cup B'$ è libera
(e dunque base).

DLM: Se $A = \phi \Rightarrow B' = B$ e $|B'| = n$ o
Se $|A| = n \Rightarrow A$ base e $|B'| = 0$ o

$$A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$$

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m \quad \bar{e}_{m+1} \dots \bar{e}_n)$$

Come nella dim. del Lemma di Steinitz
noi possiamo sostituire ad 1 ad 1
 m vettori di B con ~~invece~~ vettori di A .

Alla fine, a meno di un cambiamento di indici
si ottiene

$$B_m = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m \quad \bar{e}_{m+1} \dots \bar{e}_n) \text{ di generatori}$$

(ma n generatori $\Rightarrow$ base $\Rightarrow B_m$ è l-base)

Possiamo $B' = (\bar{e}_m, \dots, \bar{e}_n)$
ed abbiamo $|B'| = n - m$ e $A \cup B' = B$ base $\square$

Def. In K^n si dice base canonica la base B
data dai vettori $(100\dots 0), (010\dots 0), \dots, (00\dots 01)$
in quanto ogni vettore $\bar{v} \in K^n$ ha come
vettore delle componenti rispetto a B se stesso.

$$\mathbb{R}^3 \quad B = ((100), (010), (001)) \quad \text{canonica.}$$

$$(2, 13, 8) = 2(100) + 13(010) + 8(001)$$

↑
vettore

ha comp. rispetto a B

$$(2, 13, 8).$$

↑
componenti.

$B = (1010, 1101, 1001)$ NN CANONICA.

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \beta(1010) + \alpha(1101) + \gamma(1001)$$

componenti = (β, α, γ) .

Esercizio: Sia $A = (12000, 11201, 10100)$.

Sì trovi una base di $\mathbb{R}^5$ contenente A .

$$B = (12000, 10100, 10010, 10001)$$

$$(10001) = 2(12000) + 0 \dots$$

$$B_1 = (12000, 10100, 10020, 10001)$$

$$(1201) = \frac{1}{2}(12000) + \underline{1(0100)} + 0(1010) + \underline{1(0001)}.$$

$$B_1 = (12000, 11201, 10010, 10001).$$

$$(0100) = -\frac{1}{4}(2000) + \frac{1}{2}(1201) + 0 \cdot (0010) \\ - \frac{1}{2}(0001)$$

$$B_3 = \underbrace{((2000), (1201))}_A, \underbrace{(0010)}_{B'}, \underbrace{(0100)}_A$$

$$B' = ((0010)).$$

$$(0100) = \alpha(2000) + \beta(1201) + \gamma(0010) + \delta(0001) \\ = (2\alpha + \beta, 2\beta, \gamma, \beta + \delta)$$

$\gamma = 0$ $2\alpha + \beta = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{1}{4}$ $2\beta = 1 \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$	$\beta + \delta = 0$ $\nearrow \delta = -\frac{1}{2}$
---	--

oss: Siano $U, W \subseteq V_{\mathbb{R}}(1k) \Rightarrow U \cap W \subseteq V_n(1k)$

N.B. $0 \in U \cap W$ quindi

$$U \cap W \neq \emptyset.$$

Δ in generale se g_1 insieme di generatori di U
 g_2 insieme di generatori di W

$\Rightarrow$ NON è detto $g_1 \cap g_2$ generi $U \cap W$.

E.g. $U = \mathcal{L}((100), (010)) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$W = \mathcal{L}((210)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$U \cap W = W \quad \text{ma } \{ (100), (010) \} \cap \{ (210) \} = \emptyset$$

$$\mathcal{L}(\emptyset) = \{ 0 \} \neq W.$$

$$U, W \leq V_n(\mathbb{K}).$$

Quando $U \cup W$ è sottospazio?

$$\begin{aligned} \text{se } U \subseteq W &\Rightarrow U \cup W = W \leq V_n(\mathbb{K}) \\ \text{e } W \subseteq U &\Rightarrow U \cup W = U \leq V_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Cosa succede se $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$

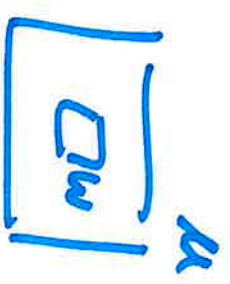
$$\exists \bar{x} \in U \setminus W \text{ ed } \exists \bar{y} \in W \setminus U.$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in U \cup W \quad \text{ma} \quad \bar{x} + \bar{y} \notin U \cup W$$

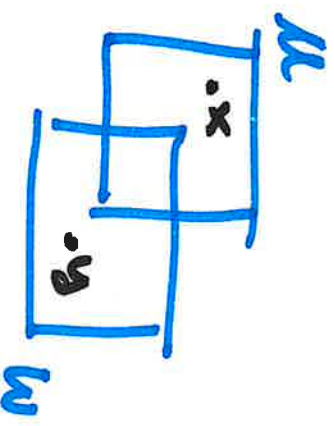
infatti se fosse $\bar{x} + \bar{y} \in U \cup W \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in U$
 oppure $\bar{x} + \bar{y} \in W$.

$$\text{Se } \bar{x} + \bar{y} \in U \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} - \bar{x} \in U \Rightarrow \bar{y} \in U \quad \text{e}$$

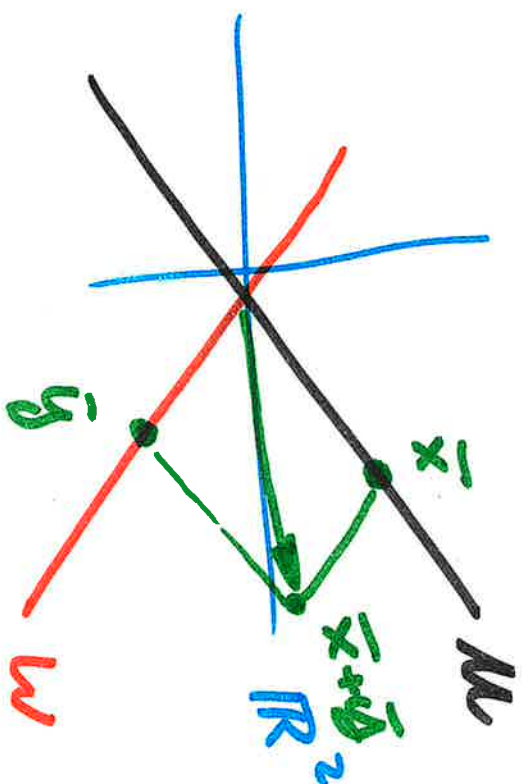
$$\text{se } \bar{x} + \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} - \bar{y} \in W \Rightarrow \bar{x} \in W \quad \text{e}$$



OK



$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \notin U \cup W$
 e dunque non è
 sottospazio o



Vogliamo costruire $\mathcal{L}(M \cup W) \leq V_n(1k)$.

Def: Siano $M, W \leq V_n(1k)$. Si dice somma di M e W il sottospazio di $V_n(1k)$ dato da

$$M + W := \{ \bar{u} + \bar{w} \mid \bar{u} \in M, \bar{w} \in W \}.$$

Teorema: $M + W = \mathcal{L}(M \cup W)$.

DLM: Sia $X = \mathcal{L}(U \cup W) \Rightarrow \forall \bar{u} \in U, \forall \bar{w} \in W$

$$\bar{u} + \bar{w} \in X \Rightarrow U + W \subseteq X.$$

Se $U + W$ è anche sottospazio $\Rightarrow U + W = X$.

Siano $\alpha, \beta \in K, \quad \bar{u} + \bar{w}, \bar{u}' + \bar{w}' \in U + W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha(\bar{u} + \bar{w}) + \beta(\bar{u}' + \bar{w}') =$$

$$= (\alpha\bar{u} + \beta\bar{u}') + (\alpha\bar{w} + \beta\bar{w}') \in U + W$$

$$\in U \quad \in W \quad \square$$

oss: Sia y_1 di generatori per $U \Rightarrow y_1 \cup y_2$ è
 y_2 di generatori per W di generatori
per $U + W$.

$$\mathcal{L}(U \cup W) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(y_1) \cup \mathcal{L}(y_2)) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(y_1 \cup y_2)) = \mathcal{L}(y_1 \cup y_2)$$

Δ y_1 libera in U $\nrightarrow$ $y_1 \cup y_2$ libera in $U+W$

Esempio $U = \mathcal{L}((100), (010))$

$W = \mathcal{L}((200), \text{~~(110)~~, (001)})$

$U+W = \mathbb{R}^3$ ma $((100), (010), (200), (001))$
non è libera!

Def: Siano $U, W \leq V_n(K)$. Si dice che le somme $U+W$ è diretta (e si scrive

$U \oplus W$) se $\forall \bar{x} \in U+W \exists! \bar{u} \in U, \exists! \bar{w} \in W:$
 $\bar{u} + \bar{w} = \bar{x}$

$U+W$ è diretta $\Leftrightarrow V \bar{s} \in S = U+W$

$\exists! (\bar{u}, \bar{w}) \in U \times W :$

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U \times W \cong U+W \\ (\bar{u}, \bar{w}) \longrightarrow \bar{u} + \bar{w} \end{array} \right.$$

in gen non è iniettiva.

è iniettiva $\Rightarrow$ somma diretta.

$U+W$

"è spaccata" in due parti

una (somma) di U e l'altra di W .

Teorema: Siano $U, W \leq V_n(K)$, con $U \oplus W$.

Allora se φ_u eq. lineari di vettori di U

φ_w eq. lineari di vettori di W

$\Rightarrow \varphi_u \cup \varphi_w$ eq. lineari di vettori di $U \oplus W$.

In particolare: se y_1 base di U
 y_2 base di W

$\Rightarrow y_1 \cup y_2$ base di $U \oplus W$

e dunque $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Dim: Sia $y_1 = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$ seq. libere di U

$y_2 = (\bar{w}_1 \dots \bar{w}_k)$ seq. libere di W .

Siccome $U \oplus W$, l'unico modo per scrivere

$\underline{0} \in U \oplus W$ come somma $\bar{u} + \bar{w}$ è

$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$ ma ris allora

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n + \beta_1 \bar{w}_1 + \dots + \beta_k \bar{w}_k = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_k \bar{u}_k = \underline{0} \Rightarrow \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_1 v \gamma_2 \text{ è libera} \quad \square$$

Teorema: Siano $U, W \leq V_n(1k)$ allora

$$U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}.$$